Mitschrift

- Lücken-Skript -

Mathe Booster

Prof. Dr. Stephan Sauter

IWT - Institut für Weiterbildung, Wissens- und Technologietransfer
IWT Wirtschaft und Technik GmbH
Fallenbrunnen 14
88045 Friedrichshafen

3. Februar 2026

Inhaltsverzeichnis

Zielsetzung

Dieses Skript ist für den 6-wöchigen Mathe-Booster 1 des IWT erstellt.

Der Mathe-Booster erstreckt sich über 6 Wochen (6 Abendtermine á 1.5 Stunden) und wendet sich an Studienanfänger*innen der Fakultät Technik der DHBW Ravensburg, die nach einem Eingangstest der Hochschule erkennen lassen, dass ihre Kenntnisse aus der Schulmathematik bislang nicht gefestigt genug sind, um den Anforderungen des technischen Studiums gewachsen zu sein.

Ein starker Fokus liegt daher in diesem Kurs auf der Festigung der mathematischen Grundlagen durch intensives, betreutes Rechnen. Der Kurs wird begleitet durch erfahrene Mathematikdozenten.

Ziel:
Ziel dieses Kurses ist es, die vorhandenen mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten durch intensive Übungen nochmals zu wiederholen und das mathematische Grundlagenwissen zu festigen.

Kursinhalte:
Die Inhalte sind auf die Erfordernisse der technischen Grundlagenfächer der Fakultät Technik der DHBW Ravensburg ausgerichtet. Der Fokus liegt auf Übungen zu elementaren Grundlagen, da diese die Basis für alle weiteren Schritte sind.

Durch Ihre Teilnahme erreichen Sie so eine optimale Begleitung der Vorlesungen in den ersten Techniksemestern. Die Grundlagen der Mathematik sind für alle Studiengänge sowie deren unterschiedliche Fächer wie z.B. Elektrotechnik oder auch Mechanik bis hin zur Konstruktion relevant.

KAPITEL 1

Grundlagen

1.1 Mengen

Schreibweise:

$M = \{1,2,3\}$	aufzählende Form einer endlichen Menge
$M = \{1,2,3,\ldots\}$	aufzählende Form einer unendlichen Menge
$M = \{x \| x \text{ mit der Eigenschaft}\}$	beschreibende Form
$\emptyset$ oder $\{\}$	leere Menge
Ω oder $\{\}$	Gesamtmenge

Mengen

logische Operation oder

logische und

Mengenoperationen/relationen:

Vereinigung	$\cup$ $\vee$	Durchschnitt	$\cap$ $\wedge$
Differenzmenge	$\setminus$	Komplementmenge	$\overline{A}$
Teilmenge	$\subset$	Obermenge	$\supset$
Element der Menge	$\in$	nicht Element der Menge	$\notin$

Intervalle:

$[a;b] = \{x \| a \leq x \leq b\}$	geschlossenes Intervall
$(a;b) = \{x \| a < x < b\}$	offenes Intervall
$(a;b] = \{x \| a < x \leq b\}$	halboffenes Intervall
$[a;b) = \{x \| a \leq x < b\}$	halboffenes Intervall

Bestimmen Sie die folgenden Mengen

a) $(-\infty;4) \cup [4;\infty)$ $\mathbb{R}$ $(-\infty$ -8 -4 0 4 8 $\infty)$

b) $[-4;2) \cap [0;4)$ $[0;2)$

c) $(-\infty;4) \cap [3;\infty)$ $[3;4)$

d) $(-\infty;4) \cup [3;\infty)$ $\mathbb{R}$

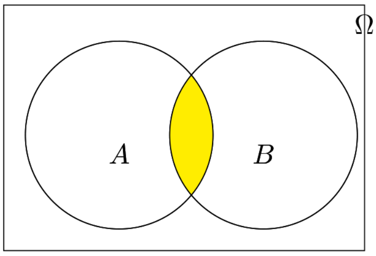
e) $[-4;2) \cap [0;2)$ $[0;2)$

f) $(-2;2) \cap [2;4)$ $\emptyset$

$\bar{A}$

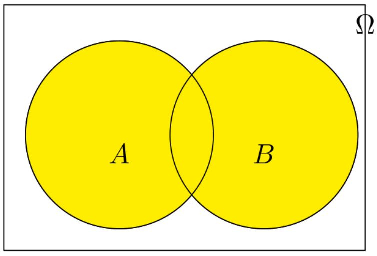
Beschreiben Sie die Mengen, die in den folgenden Venn-Diagrammen gelb unterlegt sind (ohne Negierungen).

a)



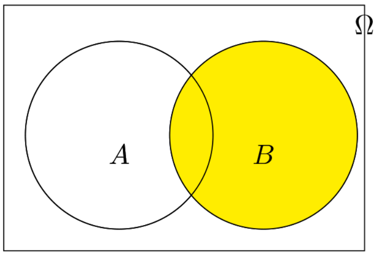
$A \cap B$

b)



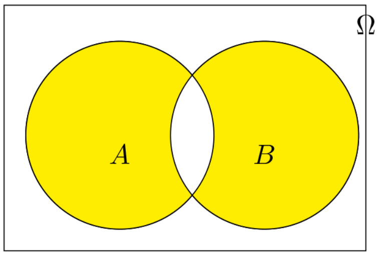
$A \cup B$

c)



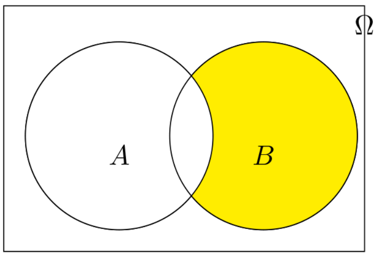
B

d)



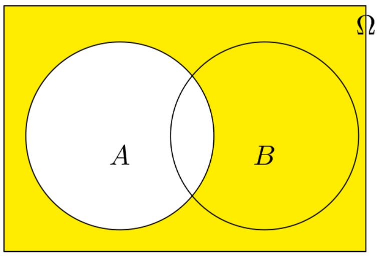
$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

e)



$B \setminus A$

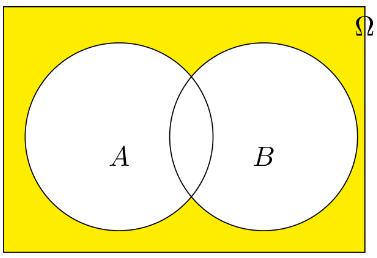
f)



(oder $\bar{A}$)

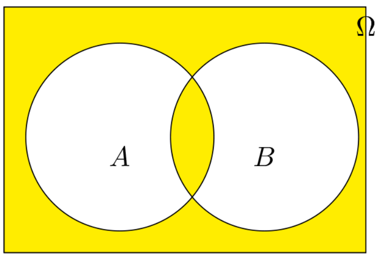
$\Omega \setminus A$

g)



$\Omega \setminus (A \cup B)$

h)



$\Omega \setminus (A \cup B) \cup (A \cap B)$

1.2 Zahlen

Zahlenmengen:

$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,...\}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,4,...\}$	natürliche Zahlen mit 0
$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1,0,1,2,3,...\}$	ganze Zahlen
$\mathbb{R}$ un- endliche Dezimalzahlen	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen (1. Semester)

Relationen zwischen Zahlen:

$a = b$	a gleich b	$a \neq b$	a ungleich b
$a < b$	a kleiner b	$a \leq b$	a kleiner oder gleich b
$a > b$	a größer b	$a \geq b$	a größer oder gleich b

Rechenregeln für Zahlen:

Kommutativgesetz	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Assoziativgesetz	$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$	$(ab)c = a(bc) = abc$
Distributivgesetz	$a(b + c) = ab + ac$	

Vorzeichen:

Ein Vorzeichen "-" entspricht einem Faktor (-1)

$$-(a + b) = -a - b \qquad -(a - b) = -a + b$$

$$-(ab) = (-a)b = a(-b) \qquad ab = (-a)(-b)$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} \qquad \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$$

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{für } n \text{ gerade} \\ -a^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Rechenregeln für Brüche:

Erweitern	$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$	$b,c \neq 0$
Kürzen	$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$	$b,c \neq 0$
Addieren	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad + bc}{bd}$	$b,d \neq 0$
Subtrahieren	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{db} = \frac{ad - bc}{bd}$	$b,d \neq 0$
Multiplizieren	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$b,d \neq 0$
Dividieren	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$	$b,c,d \neq 0$

Vereinfachen Sie folgende Brüche

Nullstellen

a) $\dfrac{3x^2-5x}{10-6x} = \dfrac{x(3x-5)}{2(5-3x)} = \dfrac{x(3x-5)}{-2(-5+3x)} = \dfrac{x(3x-5)}{-2(3x-5)} = -\dfrac{x}{2}$ mit $x \neq \frac{5}{3}$

Polstelle

b) $\dfrac{2a^2+6b^2}{a^4-9b^4} = \dfrac{2(\cancel{a^2+3b^2})}{(\cancel{a^2+3b^2})(a^2-3b^2)} = \dfrac{2}{a^2-3b^2}$ mit $a^4-9b^4 \neq 0$

c) $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2+2x-15} =$ Nullstellen 3; 4, Polstellen 3; -5 $= \dfrac{(\cancel{x-3})\cdot(x-4)}{(\cancel{x-3})\cdot(x+5)} = \dfrac{x-4}{x+5}$ für $x \neq 3; -5$

d) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \dfrac{\frac{1\cdot b}{ab}+\frac{1a}{ab}}{\frac{b}{ab}-\frac{a}{ab}} = \dfrac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{b-a}{ab}} = \dfrac{b+a}{\frac{\cancel{ab}(b-a)}{\cancel{ab}}} = \dfrac{b+a}{b-a}$

e) $\dfrac{\frac{a^2}{2}+\frac{bc}{8}}{8a^2+2bc} = \dfrac{\frac{8a^2}{2\cdot 8}+\frac{2bc}{8\cdot 2}}{8a^2+2bc} = \dfrac{8a^2+2bc}{16(8a^2+2bc)} = \dfrac{1}{16}$ für $4a^2+bc \neq 0$

$\dfrac{\frac{1}{16}\cdot(8a^2+2bc)}{8a^2+2bc} \hat{=} \dfrac{1}{16}\cdot\dfrac{(8a^2+2bc)}{(8a^2+2bc)}$

Nr. $(a+1)\cdot(a-1) = a^2-1$

f) $\dfrac{\frac{a}{a+1}+\frac{a}{a-1}}{\frac{1}{a^2-1}} = \dfrac{\frac{a(a-1)+a(a+1)}{a^2-1}}{\frac{1}{a^2-1}} = \dfrac{a(a-1)+a(a+1)}{\frac{\cancel{(a^2-1)}\cdot 1}{\cancel{a^2-1}}}$

$= a(a-1)+a(a+1) = \underline{\underline{2a^2}}$

Multiplizieren Sie folgende Brüche mit -1

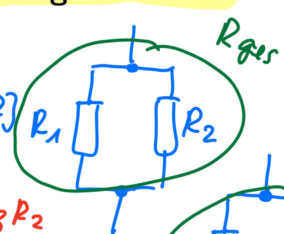
a) $\dfrac{a-b}{a+c} = (-1)\cdot\dfrac{a-b}{a+c} = \dfrac{-a+b}{a+c} = \dfrac{a-b}{-a-c}$

b) $\dfrac{a+b}{-c-d} = \dfrac{-a-b}{-c-d} = \dfrac{a+b}{c+d}$

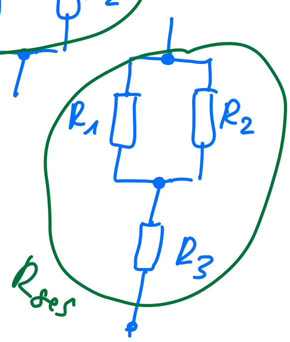
c) $\dfrac{a-b}{c-d} = \dfrac{-a+b}{c-d}$

Stellen Sie nach R um; berechnen Sie den Gesamtwiderstand; bringen Sie auf einen Bruch

a) $\dfrac{1}{R_{ges}} = \dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2} = \dfrac{R_2+R_1}{R_1\cdot R_2} \Rightarrow R = \dfrac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}$ $\dfrac{[\Omega^2]}{\Omega} = [\Omega]$



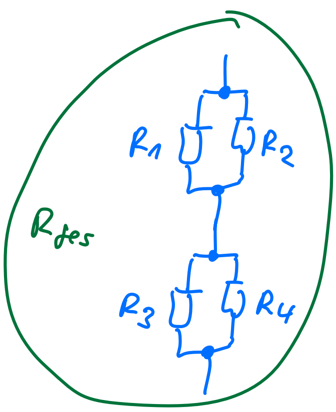
b) $R_{ges} = \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)^{-1} + R_3 = \dfrac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2} + R_3 = \dfrac{R_1R_2+R_3R_1+R_3R_2}{R_1+R_2}$



c) $R_{ges} = \left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)^{-1} + \left(\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}\right)^{-1} =$

$= \dfrac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2} + \dfrac{R_3\cdot R_4}{R_3+R_4} =$

$= \dfrac{R_1\cdot R_2\cdot R_3 + R_1\cdot R_2\cdot R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}$



Einheiten-Check am Ende !!

Stellen Sie nach R_1 um

$$U_2 = \frac{R_2}{\boldsymbol{R}_1 + R_2} U_1 - \frac{\boldsymbol{R}_1 R_2}{\boldsymbol{R}_1 + R_2} I_2$$

Lösungsweg:

Tipp: Die Gleichung sollte so umgeformt werden, dass $\boldsymbol{R}_1$ nur an einer Stelle in der Gleichung steht. Dazu empfiehlt es sich, zunächst die Brüche zu beseitigen:

$$U_2(R_1 + R_2) = R_2 U_1 - R_1 R_2 I_2$$

$$U_2 R_1 + U_2 R_2 = R_2 U_1 - R_1 R_2 I_2 \quad \Big| \begin{array}{l} + R_1 R_2 I \\ - U_2 R_2 \end{array}$$

Tipp: Sortieren Sie nun die Gleichung, indem Sie alle Terme mit $\boldsymbol{R}_1$ auf eine Seite bringen:

$$U_2 R_1 + R_1 \cdot R_2 \cdot I_2 = R_2 U_1 - U_2 R_2$$

Tipp: Klammern Sie anschließend $\boldsymbol{R}_1$ sowie R_2 aus:

$$R_1(U_2 + R_2 I_2) = R_2(U_1 - U_2)$$

U

R · I

$$R_1 = \frac{R_2(U_1 - U_2)}{U_2 + R_2 I_2} = \frac{R_2 U_1}{2U_2} - \frac{R_2 \cancel{U_2}}{2\cancel{U_2}} = R_2\left(\frac{U_1}{2U_2} - \frac{R_2}{2}\right)$$

Spannung U_2

$U_1 - U_2 = U_3$ [V]

Stellen Sie nach μ um

$$P = \frac{F}{d\pi\left(\frac{d}{4} + \boldsymbol{\mu} h\right)}$$

Lösungsweg:

Tipp: Um leichter nach $\boldsymbol{\mu}$ umstellen zu können, sollte man als Erstes mit dem entsprechenden Term multiplizieren, danach steht $\boldsymbol{\mu}$ im Zähler:

$$P \cdot \left(\frac{d}{4} + \mu \cdot h\right) = \frac{F}{d\pi}$$

Tipp: Bringen Sie alle Terme, in denen $\boldsymbol{\mu}$ nicht vorkommt, auf die andere Seite der Gleichung:

$$\frac{d}{4} + \mu \cdot h = \frac{F}{d\pi \cdot P}$$

$$h \cdot \mu = \frac{F}{d\pi P} - \frac{d}{4}$$

Tipp: Es ist immer ratsam, die Terme soweit wie möglich zu vereinfachen, in diesem Fall durch Bilden des Hauptnenners. Schließlich muss noch durch h dividiert werden:

$$\mu \cdot h = \frac{F}{d \cdot \pi P} \cdot \frac{4}{4} - \frac{d}{4} \cdot \frac{d\pi \cdot P}{d\pi \cdot P}$$

$$\mu \cdot h = \frac{4F - d^2\pi \cdot P}{4d\pi \cdot P}$$ und damit: $$\underline{\underline{\boldsymbol{\mu} = \frac{4F - d^2\pi P}{4d\pi P h}}}$$

Stellen Sie nach μ um

nach μ umstellen

$$F_L = \frac{1 - 4\frac{H}{D}\mu}{\left(1 + 4\frac{h}{d}\mu\right)} \cdot F_k \cdot \left(\frac{D}{d}\right)^2$$

Tipp: μ darf nicht im Nenner stehen $\rightarrow$ auf die linke Seite bringen.

$$F_L \cdot \left(1 + 4\frac{h}{d} \cdot \mu\right) = \left(1 - 4\frac{H}{D}\mu\right) \cdot F_K \cdot \frac{D^2}{d^2}$$ ausmultiplizieren

$$F_L + 4F_L\frac{h}{d} \cdot \mu = F_K \cdot \frac{D^2}{d^2} - 4\frac{H}{\cancel{D}} \cdot \mu \cdot F_K \cdot \frac{D^{\cancel{2}}}{d^2}$$ kürzen

$$F_L + \frac{4F_L h\mu}{d} = \frac{F_K D^2}{d^2} - \frac{4H\mu F_K D}{d^2}$$ nach μ auflösen

$$\frac{4F_L h \cdot \mu}{d} + \frac{4HF_K D\mu}{d^2} = \frac{F_K D^2}{d^2} - F_L$$

$$\mu\left(\frac{4F_L h}{d} + \frac{4HF_K D}{d^2}\right) = \frac{F_K D^2 - F_L \cdot d^2}{d^2}$$

$$\mu \cdot \left(\frac{4F_L h d + 4HF_K D}{d^2}\right) = \frac{F_K D^2 - F_L \cdot d^2}{d^2}$$

$$\mu = \frac{\frac{F_K D^2 - F_L d^2}{d^2}}{\frac{4F_L h d + 4HF_K \cdot D}{d^2}} = \frac{(F_K D^2 - F_L d^2) \cdot d^2}{d^2 (4F_L h d + 4HF_K D}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{F_K D^2 - F_L d^2}{4(F_L h d + F_K H D)}$$

Zahlensysteme:

1001 1111	Binärzahlen	Dualsystem
A0 FF 89 1111	Hex-Zahlen	Hexadezimalsystem
103,234	Dezimalzahlen	Dezimalsystem

Wandeln Sie die angegebenen Zahlen in ein anderes Zahlensystem um

a) 1001 1111 als Hexadezimalzahl =

b) 1001 1111 als Dezimalzahl =

c) A0 FF als Dezimalzahl =

d) A0 FF als Binärzahl =

e) 32 als Hexadezimalzahl =

f) 33 als Binärzahl =

1.3 Binomialkoeffizienten, Fakultäten

Binomische Formeln:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a-b)^4 &= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4
\end{aligned}$$

Pascalsches Dreieck:
Jeder Eintrag im Pascalschen Dreieck ist die Summe der zwei darüberstehenden Einträge

$$\begin{array}{ccccccccccc|c}
 & & & & & 1 & & & & & & 0 \\
 & & & & 1 & + & 1 & & & & & 1 \\
 & & & 1 & + & 2 & & 1 & & & & 2 \\
 & & 1 & & 3 & + & 3 & & 1 & & & 3 \\
 & 1 & + & 4 & + & 6 & + & 4 & + & 1 & & 4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 &
\end{array}$$

$(x+1)^4 = 1 \cdot x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

$(x+1)^5 = 1 \cdot x^5 + 5 \cdot x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \ldots \cdot k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

entspricht dem Eintrag im Pascalschen Dreieck in Zeile n an der k. Stelle (Zählung beginnt jeweils mit 0)

Die Koeffizienten der Binomischen Formeln sind die Binomialkoeffizienten.

Die Fakultät einer natürlichen Zahl n ist das Produkt aller nat. Zahlen von 1 bis n

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{für } n > 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie folgenden binomischen Ausdrücke

a) $(x+3)^3 =$ $(x+3)\cdot(x+3)(x+3) = (x^2+3x+3x+9)(x+3) = x^3+9x^2+27x+27$

b) $(2x-1)^3 =$ $(2x-1)(2x-1)(2x-1) = (4x^2-2x-2x+1)(2x-1) = 8x^3-12x^2+6x-1$

c) $(x+1)^4 =$ $(x+1)^2(x+1)^2 = (x^2+2x+1)(x^2+2x+1) = 1x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

d) $(x-1)^4 =$ $(x-1)^2(x-1)^2 = x^4-4x^3+6x^2-4x+1$

Ergänzen Sie die nachfolgenden Summen zu einem binomischen Quadrat

a) $x^2+4x+\dots =$ 4 $(x+2)^2$

b) $4x^2+8xy+\dots =$ $4y^2$ $(2x+2y)^2$

c) $16a^2+64b+\dots =$ $\frac{b^2}{a^2}$ $16a^2+64b+\frac{b^2}{a^2} = (4a+8\frac{b}{a})^2$

d) $x^2-xy+\dots =$ $\frac{1}{4}y^2$ $x^2-xy-\frac{1}{4}y^2 = (x-\frac{1}{2}y)^2$

e) $x^4-8x^2y+\dots =$ $16y^2$ $(x^2-4y)^2$

f) $-4x^2+16xy^2+\dots =$ $-16y^4$ $-(2x-4y^2)^2$

g) $2x^2-2x\sqrt{3y}+\dots =$ $\frac{3}{2}y$ $2x^2-2x\sqrt{3y}+\frac{3}{2}y = (\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{3y}}{\sqrt{2}})^2$

h) $2a+3\sqrt{2ab}+\dots =$ $\frac{9}{4}b$ $2a+3\sqrt{2ab}+\frac{9}{4}b = (\sqrt{2a}+\frac{3}{2}\sqrt{b})^2$

i) $0.004a^2+0.008ab^2+\dots =$ $004b^4$ $0.004a^2+0.008ab^2+0.04b^4$
$= (0.02a+0.2b^2)^2$

1.4 Potenzen und Wurzeln

Potenzen und Wurzeln:

Eine Potenz besteht aus der Basis $a \in \mathbb{R}$ und dem Exponenten (Hochzahl) $n,m \in \mathbb{N}_0$

gleiche Basis	$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$	$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$	$\boxed{(a^n)^m = a^{m\cdot n}}$
gleicher Exponent	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	

Spezialfälle:

$\boxed{a^0 = 1}$ $\boxed{a^1 = a}$ $\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a}}$

Rechnen mit Wurzeln:

Für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ besitzt die Gleichung $a = x^n$ genau eine nicht negative, reelle Lösung, die als n-te Wurzel aus a bezeichnet wird: $\sqrt[n]{a}$

$\sqrt[1]{a} = a$	$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$	$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$	$\sqrt[n]{a^n} = a$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}}$	$\boxed{a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}$

$a^{\left(\frac{m+n}{n\cdot m}\right)} = \sqrt[n\cdot m]{a^{m+n}}$

Sei $a > 0$. Vereinfachen Sie

a) $\sqrt{a^4} = \sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a^2} = a\cdot a = a^2 = \sqrt[2]{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$

b) $a^5 \cdot a^{-3} = a^5\cdot a^{-3} = a^{5-3} = a^2$

c) $a^3 \cdot \sqrt[4]{a} = a^3\cdot a^{1/4} = a^{12/4+1/4} = a^{13/4} = \sqrt[4]{a^{13}}$

d) $\left(\sqrt{a^3}\right)^5 = \sqrt{a^{3\cdot 5}} = \sqrt{a^{15}}$

e) $\left(\sqrt{a^{-3}}\right)^{-2} = \left(a^{-3/2}\right)^{-2} = a^{3/2\cdot 2} = a^3$

f) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a} = a^{1/3}\cdot a^{1/4} = a^{\frac{4+3}{12}} = \sqrt[12]{a^7}$

g) $\dfrac{a^1}{a^{-2}} = a^{1+2} = a^3$

h) $a^{-2}\cdot\sqrt{a} = a^{-2}\cdot a^{1/2} = a^{-4/2+1/2} = a^{-3/2} = \dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

10.2.26

Vereinfachen Sie so weit wie möglich durch Anwendung der Potenzgesetze:

$$\frac{5a^n b^{n+4} c^{2n+1}}{abx^{n+1}y^{n+2}z^{n+3}} : \frac{3a^{n-1}b^3c^{n+1}}{2xy^{2-n}z^{3-n}}$$

Vereinfachen Sie so weit wie möglich durch Anwendung der Potenz- und Wurzelgesetze:

$$\frac{125a^7b^{11}}{138x^{10}y^8} : \frac{175a^4b^{18}}{92x^9y^8}$$

1.5 Logartithmen

Als **Logarithmus** einer positiven Zahl x bezeichnet man den Exponenten, mit dem man eine festgelegte Basis b potenzieren muss, um die angegebene Zahl x zu erhalten, d.h.
$y = \log_b(x)$ ist die Lösung von $b^y = x$

Wichtige Basen:

$b = 2$	$y = \mathrm{lb}(x)$	dualer Logarithmus
$b = 10$	$y = \lg(x)$	dekadischer Logarithmus
$b = e$	$y = \ln(x)$	natürlicher Logarithmus

Umrechnung der Basen:

$$\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$$

Rechenregeln:

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) \qquad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

Vorsicht: $\log(a + b) \neq \log(a) + \log(b)$

Vereinfachen Sie folgende Terme

a) $e^x \cdot e^x =$

b) $\dfrac{2^x}{2^{2x}} =$

c) $\log\left(\dfrac{x}{2x-1}\right) =$

d) $6^x \cdot 3^x =$

e) $a^{-\sqrt{x}} \cdot a^{\sqrt{x}} =$

f) $\ln(xye^x) =$

g) $\dfrac{1}{3}\ln\left(a^{3m}\right) - (m-1)\ln(a) =$

Lösen Sie nach x auf

a) $10^a \cdot 100^{b-3} \cdot 3^c = 10^x \implies$

b) $\dfrac{4}{3^{2x}} - \dfrac{2}{3^x} = 0 \implies$

c) $15 = 3^x + 9 \implies$

Wie lautet der Exponent zur Basis e von

a) $7 =$

b) $10^3 e^x =$

c) $\ln(3) =$

d) $\dfrac{1}{x^2} =$

1.6 Zahlenfolgen

Eine **Zahlenfolge**, oder kurz **Folge**, ist eine Aufzählung von unendlich vielen fortlaufend numerierten Zahlen: $a_1, a_2, a_3, ...$

Mathematische Definition: Eine Folge ist eine Abbildung
$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $n \to a_n$

Eulersche Zahl e:

Die Eulersche Zahl ist der Grenzwert der Zahlenfolge: (a_n) mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718$$

Bestimmen Sie die ersten 3 Elemente folgender Zahlenfolgen

a) $a_n = \frac{1}{n+1}$

b) $a_n = 2n$

c) $a_n = 2n + 1$

d) $a_n = \cos(n\pi)$

e) $a_n = n!$

f) $a_n = (-1)^n$

g) $a_n = 4n + 1$

h) $a_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

Können Sie eine Regel angeben, nach der sich folgende Zahlenfolgen berechnen?

a) $(a_n) = (1,2,4,8,16,...) \implies$

b) $(a_n) = (0,1,0,1,0,...) \implies$

c) $(a_n) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8},...\right) \implies$

d) $(a_n) = \left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},...\right) \implies$

e) $(a_n) = \left(1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27},...\right) \implies$

f) $(a_n) = \left(1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},...\right) \implies$

1.7 Gleichungen

Eine Gleichung beschreibt eine Aussage über die Gleichheit 2er Terme, was mit einem Gleichheitszeichen dargestellt wird Lösen von Gleichungen, bedeutet die Bestimmung aller Werte der Unbekannten, für die die Gleichheit der Terme erfüllt ist.

Lineare Gleichungen:
Bei linearen Gleichungen kommen die Unbekannten ausschliesslich in Linearkombinationen vor
1 Unbekannte: Auflösen nach der Unbekannten durch äquivalente Umformungen
2 Unbekannte: Lösen durch Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren
$\geq$ 3 Unbekannte: Lösen durch Gauß-Verfahren

Gauß-Verfahren:
Das Gauß-Verfahren wird in 2 Schritten durchgeführt

1) Durch Zeilenumformungen
   - Eine Zeile, oder das Vielfache einer Zeile wird zu einer anderen Zeile addiert
   - Zwei Zeilen werden vertauscht

   wird das Gleichungssystem in Stufenform gebracht (in jeder Zeile wird eine weitere Variable eliminiert)
2) Durch Einsetzen wird ausgehend von der letzten Zeile eine Variable berechnet und in die darüberliegende Zeile eingesetzt

Lösen Sie folgende lineare Gleichungen

a) $$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \quad \Longrightarrow \\ 3x - 2y &= 8 \quad \Longrightarrow \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x + 4y &= 11 \quad \Longrightarrow \\ x - 2y &= -3 \quad \Longrightarrow \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x - 6y &= -3 \quad \Longrightarrow \\ 2x - y &= 4x - 7 \quad \Longrightarrow \end{aligned}$$

Lösen Sie folgende linearne Gleichungssysteme

a) $$\begin{aligned} 3x + 3y - z &= 5 \quad \Longrightarrow \\ 4x + 5y + z &= -1 \\ 2x - 5y + 7z &= 9 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \quad \Longrightarrow \\ x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 4y + 7z &= 4 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3x - 2y \phantom{{}-2z} &= 1 \quad \Longrightarrow \\ -2x + y - 2z &= 1 \\ -2y + z &= 1 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2x + 4y + 2z + u &= 2 \quad \Longrightarrow \\ 3x - 3y + z \phantom{{}+u} &= -6 \\ x + y - 2z \phantom{{}+u} &= 8 \\ 4x - 2y + 3z \phantom{{}+u} &= -10 \end{aligned}$$

Quadratische Gleichungen:

- *abc*-Form:

  $ax^2 + bx + c = 0$ hat 2 Lösungen $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- *pq*–Form:

  $x^2 + px + q = 0$ hat 2 Lösungen $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

(2 verschiedene Reelle, 2 identische Reelle oder zwei konjugiert Komplexe)

Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen

a) $x^2 + 8x + 15 = 0 \quad \Longrightarrow$

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0 \quad \Longrightarrow$

c) $x^2 - 2x + 5 = 0 \quad \Longrightarrow$

Gleichungen mit Brüchen, Wurzeln, Beträgen, Logarithmus, Exp.funktionen:

Bei Gleichungen mit Brüchen, Wurzeln und dem Logarithmus ist zunächst der Definitionsbereich festzulegen. Nur Lösungen im Definitionsbereich sind Lösungen der Gleichung.

- Gleichungen mit einer Unbekannten im Nenner werden durch Multiplikation mit dem Hauptnenner zu einem einfacheren Gleichungstyp umgeformt.
- Bei Gleichungen mit der Unbekannten unter einer Wurzel, wird zunächst die Wurzel isoliert und anschliessend die Gleichung quadriert. Da Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, muss die erhaltene Lösung in der Ausgangsgleichung überprüft werden.
- Befindet sich die Unbekannte in einem Logarithmus oder einer Exponentialfunktion, so wird jeweils die Umkehrfunktion auf die Gleichung angewandt.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen

a) $\dfrac{2x-4}{x+4} = \dfrac{6x}{3x-2} \quad \Longrightarrow$

b) $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{x+4} \quad \Longrightarrow$

c) $\dfrac{5x+6}{7} - \dfrac{2x-9}{11} - 7 = 0 \quad \Longleftrightarrow$

d) $\sqrt{7+x^2} - 2 = x \quad \Longleftrightarrow$

e) $x + 3\sqrt{x-1} = 1 \quad \Longleftrightarrow$

f) $\dfrac{x-1}{2-x} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{6-x}{3x^2-12} \quad \Longrightarrow$

g) $\sqrt{2x-24} + 3 = x \quad \Longleftrightarrow$

h) $\sqrt{3x^2-1} = \sqrt{7x-3} \quad \Longleftrightarrow$

i) $\sqrt{x+4} = 2 + \sqrt{x-2} \quad \Longrightarrow$

j) $\ln(2x-3) = \dfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow$

k) $\ln(x^2) = 4 \quad \Longrightarrow$

l) $\ln(x - \sqrt{e}) = \dfrac{1}{2} \quad \Longrightarrow$

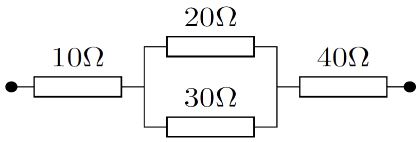
m) $\dfrac{e^{-x}}{2} - 3 = 0 \quad \Longrightarrow$

n) $e^{3x} = e^{x^2 - 10} \quad \Longrightarrow$

1.8 Aufgaben

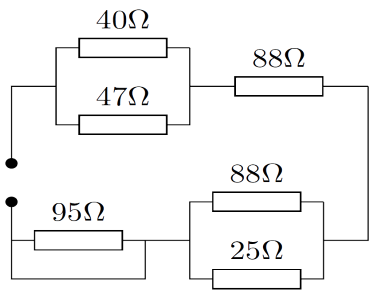
Berechnen Sie den Gesamtwiderstand folgender Schaltungen

a)



$R=$

b)



$R=$

Adiabatische Zustandsänderung

Bei adiabatischen Zustandsänderungen idealer Gase gilt: $\frac{p_1^{\kappa-1}}{T_1^{\kappa}} = \frac{p_2^{\kappa-1}}{T_2^{\kappa}}$

Nun komprimieren Sie die Luft in einer Luftpumpe auf den doppelten Druck $p_2 = 2p_1$.

Auf welche Temperatur T_2 erwärmt sie sich, wenn vorher $T_1 = 300$ Kelvin gilt? ($\kappa = 1.4$).